Chapitre 12

Nombres réels

Plan du chapitre

1 Propriété de la borne supérieure

1.1 Majorants, minorants, maximum, minimum

Définition 12.1 – Majorants, minorants

Soit $m, M \in \mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que :

- A est majorée par M si tout élément de A est inférieur ou égal à M, càd $\quad \forall x \in A \quad x \leq M$.
- A est minorée par m si tout élément de A est supérieur ou égal à m, càd $\quad \forall x \in A \quad x \geq m$.
- A est majorée si A admet un majorant.
- A est minorée si A admet un minorant.
- A est bornée si A est à la fois majorée et minorée.

On dit aussi que M est un majorant de A, et que m est un minorant de A.

Exemple 1.

- L'ensemble $]0,1]$ est minorée par 0, par -7 (etc.) et majoré par 1, par 12 (etc.). Il est donc borné.
- L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majoré, l'ensemble $\mathbb{R}_-$ n'est pas minoré.
- Les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ ne sont ni minorés ni majorés.

Définition 12.2 – Maximum, minimum

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que :

- $M \in \mathbb{R}$ est ***le*** <u>maximum</u> de A si M est un majorant de A et $\boxed{M \in A}$.
- $m \in \mathbb{R}$ est ***le*** <u>minimum</u> de A si m est un minorant de A et $\boxed{m \in A}$.

On dit aussi que M est <u>le plus grand élément</u> de A et que m est <u>le plus petit élément</u> de A.

Pour être un maximum ou un minimum d'un ensemble A, il faut être un élément de A !
Un ensemble non majoré n'admet pas de majorant donc n'admet pas de maximum.

Théorème 12.3

Le maximum et le minimum, lorsqu'ils existent, sont uniques. Ils sont notés respectivement :

$$\max A \qquad \text{et} \qquad \min A$$

Démonstration. Supposons que M et M' soient deux maximum d'un même ensemble A.

- Comme M majore A et que $M' \in A$, on a $M' \leq M$.
- Comme M' majore A et que $M \in A$, on a $M \leq M'$.

Ainsi, $M = M'$: le maximum est bien unique. La démonstration est similaire pour l'unicité du minimum. □

Exemple 2.
- $\min\left[0,1\right] = 0$ et $\max\left[0,1\right] = 1$
- $\mathbb{N}$ est non majoré et n'admet donc pas de maximum. On ne peut écrire : $\cancel{\max \mathbb{N}}$
- $\min\left[0,1\right[= 0$ mais $\left[0,1\right[$ n'admet pas de maximum.

1.2 Borne supérieure, borne inférieure

Définition 12.4 – Borne inférieure, borne supérieure

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que :

- $M \in \mathbb{R}$ est ***la*** <u>borne supérieure</u> de A si M est le plus petit des majorants de A.
- $m \in \mathbb{R}$ est ***la*** <u>borne inférieure</u> de A si m est le plus grand des minorants de A.

On dit aussi que M est le supremum de A et que m est l'infimum de A.

Le réel $\sup A$ n'appartient pas forcément à A ! Cf le premier item de l'Exemple 3.
Un ensemble non majoré n'admet pas de majorant donc n'admet pas de supremum.

Théorème 12.5

Le supremum et l'infimum, lorsqu'ils existent, sont uniques. Ils sont notées respectivement :

$$\sup A \qquad \text{et} \qquad \inf A$$

Exemple 3.

- Avec $A = \left[0,1\right[$, les majorants de A sont tous les éléments de l'ensemble $B = \left[1,+\infty\right[$. Le plus petit d'entre eux est 1, car c'est le minimum de B. On a donc

$$\sup A = \sup \left[0,1\right[= 1 \qquad (= \min B)$$

- Avec $A' = \left[0,1\right]$, les majorants de A' sont, là encore, tous les éléments de l'ensemble $B = \left[1,+\infty\right[$. On a donc

$$\sup A' = \sup \left[0,1\right] = 1 \qquad (= \min B)$$

- Avec $A'' = \mathbb{N}$, il n'y a pas de majorant de A''. Donc A'' n'admet pas de borne supérieure et on ne peut pas écrire : $\cancel{\sup A''}$.

Théorème 12.6 – Axiome : propriété de la borne supérieure

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

On dit que $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.

Démonstration. Admise en MPSI. □

Dans les exercices, on utilisera surtout des caractérisations :

Théorème 12.7 – Caractérisation de la borne supérieure / inférieure avec un ε

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si A est majorée,

$$M = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A & & x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists x \in A & x > M - \varepsilon \end{cases}$$

De même, si A est minorée,

$$m = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A & & x \geq m \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists x \in A & x < m + \varepsilon \end{cases}$$

Autrement dit, $M = \sup A$ si et seulement si $\begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{Pour tout } \varepsilon > 0,\ M - \varepsilon \text{ n'est pas un majorant de } A \end{cases}$

Exemple 4. On pose $A = \left\{ \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer que $\sup A = 1$.

Rappel : $A^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans A.

Théorème 12.8 – Caractérisation de la borne supérieure / inférieure avec des suites

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si A est majorée,

$$M = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A & x \leq M \\ \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} & u_n \to M \end{cases}$$

De même, si A est minorée,

$$m = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A & x \geq m \\ \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} & u_n \to m \end{cases}$$

Exemple 5. On pose $A = \left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Déterminer $\inf A$.

1.3 Bilan : majorant / sup / max

Remarque. Un(e) majorant / minorant / maximum / minimum / supremum / infimum doit toujours être un élément de $\mathbb{R}$: il ne peut pas valoir $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème 12.9

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Si A admet un maximum, alors ce maximum est aussi la borne supérieure de A : $\max A = \sup A$.

De même, si A admet un minimum, alors ce minimum est aussi la borne inférieure de A : $\min A = \inf A$.

Démonstration. Soit $M = \max A$ le maximum de A. (Montrons que M vérifie la caractérisation de la borne supérieure). Comme M est un majorant de A, on a

$$\forall x \in A \quad x \leq M$$

Prouvons maintenant que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad x > M - \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $x = M \in A$. Alors $M > M - \varepsilon$. Donc cette assertion est vraie. Ainsi, A admet une borne supérieure et $M = \sup A$. □

La réciproque du Théorème 12.9 est fausse : par exemple si $A = \left[0, 1\right[$, alors $\sup A = 1$ mais A n'admet pas de maximum : si c'était le cas, ce maximum serait égal à 1, et en particulier on aurait $1 \in A$, ce qui est faux.

Remarque. Au final, un maximum est un supremum, et un supremum est un majorant, mais les réciproques sont fausses en général.

1.4 Fonctions et max / min / sup / inf

Remarque. Soit $f : \left[a, b\right] \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) si l'ensemble $f(\left[a, b\right])$ admet un maximum (resp. minimum) et dans ce cas, par définition :

$$\max_{x \in \left[a,b\right]} f(x) := \max f(\left[a, b\right]) \qquad \min_{x \in \left[a,b\right]} f(x) := \min f(\left[a, b\right])$$

Sur le même principe que la remarque ci-dessus, on peut définir le supremum et l'infimum d'une fonction :

Définition 12.10

Soit $f : \left[a, b\right] \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un supremum (resp. infimum) si l'ensemble $f(\left[a, b\right])$ admet un supremum (resp. infimum) et dans ce cas, par définition :

$$\sup_{x \in \left[a,b\right]} f(x) := \sup f(\left[a, b\right]) \qquad \inf_{x \in \left[a,b\right]} f(x) := \inf f(\left[a, b\right])$$

Si A est une partie de $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire $A = \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in I \right\}$ pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, on peut étudier les variations de f pour en déduire les éventuels maximum / supremum / minimum / infimum de A.

Exemple 6. On pose $A = \left\{x \ln x \mid x \in \left]0,1\right[\right\}$. Est-ce que A admet un maximum ? un supremum ? un minimum ? un infimum ?

2 Approximation décimale d'un réel

Définition 12.11 – Ensemble $\mathbb{D}$

On dit qu'un réel x est un nombre décimal si on peut l'écrire avec un nombre fini de décimales, ou de manière équivalente si

$$\exists a \in \mathbb{Z} \qquad \exists n \in \mathbb{N} \qquad x = \frac{a}{10^n}$$

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux :

$$\mathbb{D} := \left\{ \frac{a}{10^n} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Exemple 7.

- Tout nombre entier est un nombre décimal : $27 = 27,0 = \dfrac{27}{100} \in \mathbb{D}$
- $0,654 = \dfrac{654}{1000} \in \mathbb{D}$
- $\dfrac{1}{4} = 0,25 = \dfrac{25}{100} \in \mathbb{D}$
- $\dfrac{1}{3} = 0,3333(\ldots) \notin \mathbb{D}$

Si $x = \dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors x possède au plus n décimales. On notera que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Théorème 12.12

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Le nombre décimal $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \in \mathbb{D}$ vérifie

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}$$

Démonstration.

□

- r_n est appelé valeur approchée par défaut de x à 10^{-n} près. C'est le plus grand élément de $\mathbb{D}$ avec n décimales qui soit inférieur ou égal à x.
- $r_n + \dfrac{1}{10^n}$ est appelé valeur approchée par excès de x à 10^{-n} près. C'est le plus petit élément de $\mathbb{D}$ avec n décimales qui soit strictement supérieur à x.

Exemple 8.

	1	e	-1	$-\sqrt{2}$
Développement décimal	1	2,71828...	-1	$-1,41421...$
par défaut à 10^{-3} près	1,000	$2,718$	....	....
par excès à 10^{-3} près	1,001	$2,719$	....	....

Pour un réel ...., la valeur par défaut à 10^{-n} près s'obtient en tronquant son développement décimal à la n-ième décimale.

3 Parties denses dans $\mathbb{R}$

Théorème 12.13 – Partie dense

Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tous réels a, b avec $a < b$, l'intervalle $\left]a, b\right[$ contient (au moins) un élément de D.

(ii) Pour tous réels a, b avec $a < b$, l'intervalle $\left]a, b\right[$ contient une infinité d'éléments de D.

Lorsque ces assertions sont vérifiées, on dit que D est dense dans $\mathbb{R}$.

Dire que l'intervalle $\left]a, b\right[$ contient (au moins) un élément de D revient à dire que $\left]a, b\right[\cap D \neq \varnothing$.

Démonstration. Montrons que ces deux assertions sont équivalentes. Le sens (ii) $\Longrightarrow$ (i) est évident. Montrons (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $a < b$ deux réels. Montrons que $\left]a, b\right[$ contient une infinité d'éléments de D. Il suffit pour cela de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intervalle $]a,b[$ contient (au moins) n éléments de D. On pose, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$a_k = a + k\frac{b-a}{n} \qquad \text{donc} \qquad a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

Or, par (i), chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ contient au moins un élément de X, appelons d_k l'un de ces éléments. Ainsi, l'intervalle $]a,b[$ contient $d_0, d_1, \cdots, d_{n-1}$, c'est-à-dire contient (au moins) n éléments de D. D'où le résultat. □

Théorème 12.14

Les ensembles $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Idée de la preuve. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrons que $]a,b[$ contient un élément de $\mathbb{D}$, puis de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

On pose $x = \dfrac{a+b}{2}$, de sorte que $a < x < b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n \in \mathbb{D}$ la valeur approchée par défaut de x à 10^{-n} près. Pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, on peut montrer que

$$a < r_n \leq x < b$$

et donc $r_n \in \,]a,b[\, \cap \mathbb{D}$. On en déduit que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, on a également $r_n \in \,]a,b[\, \cap \mathbb{Q}$, donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Enfin, montrons que $]a,b[$ contient un irrationnel.

□

Corollaire 12.15

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. L'intervalle $]a,b[$ contient une infinité de décimaux, de rationnels et d'irrationnels.

Corollaire 12.16 – L'intérêt de la densité

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe (au moins) un décimal, un rationnel et un irrationnel dans $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$.

Remarque. Ainsi, si D est dense dans $\mathbb{R}$, alors pour tout réel x et tout $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on souhaite, on pourra toujours trouver un élément $r \in D$ qui vérifie $|r - x| < \varepsilon$. Autrement dit, **on pourra toujours trouver un élément de D aussi “près” que l'on veut d'un réel x donné**.

Théorème 12.17 – Caractérisation de la densité avec des suites

Une partie $D \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout réel x, il existe une suite à valeurs dans D qui converge vers x.

Exemple 9. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut montrer que $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \to x$ et $r_n \in \mathbb{D}$ donc $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (idem pour $\mathbb{Q}$).

4 Compléments

4.1 La droite numérique achevée

Définition 12.18 – Droite numérique achevée

On note $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, où $-\infty$ et $+\infty$ sont deux éléments qui ne sont pas dans $\mathbb{R}$.

On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ l'ordre $\leq$ défini sur $\mathbb{R}$, avec les relations

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad -\infty < x < +\infty$$

(càd $x \leq +\infty$ et $x \neq +\infty$, idem pour $-\infty$).

On verra au prochain chapitre qu'on peut également définir les opérations $+$, $-$, $\times$, etc. sur $\overline{\mathbb{R}}$. À ce stade, il s'agit plus d'une commodité qu'autre chose.

4.2 Les intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 12.19

Soit $I \subset \mathbb{R}$. On dit que I est un <u>intervalle (de $\mathbb{R}$)</u> si

$$\forall a, b \in I \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (a \leq x \leq b \implies x \in I)$$

En d'autres termes, un intervalle est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui n'a pas de “trou” : si deux points a et b sont dans un intervalle (sans être forcément les bornes), tous les points du segment qui relie a à b sont aussi dans cet intervalle.

On peut alors montrer que tout intervalle de $\mathbb{R}$ s'écrit : $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta[$, $]\alpha, \beta]$ ou $]\alpha, \beta[$ avec $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\alpha \leq \beta$, avec l'interdiction de “fermer” en $\pm\infty$: $\cancel{[-\infty}, \ldots$ et $\cancel{+\infty]}$.

4.3 Hors-programme : $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure

La propriété de la borne supérieure (Théorème 12.6) est un axiome et une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, inhérente à sa construction. Très grossièrement, cela veut dire que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admet une limite finie, cette limite “ne sort pas de $\mathbb{R}$” et restera dans $\mathbb{R}$.
Par contre, $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure : on peut trouver une suite à valeurs dans $\mathbb{Q}$ dont la limite (finie) n'est pas dans $\mathbb{Q}$. En utilisant le développement décimal de $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1,4142135623...$$

on peut définir une suite u_n :

$$\begin{array}{ll} u_0 = 1 & u_3 = 1,414 \\ u_1 = 1,4 & u_4 = 1,4142 \\ u_2 = 1,41 & \ldots\ldots \end{array}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $u_n \in \mathbb{Q}$. Mais la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\sqrt{2}$ qui n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. C'est une façon de prouver que $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure.

5 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour déterminer la borne supérieure M d'un ensemble A :

- On cherche d'abord quelle est la réponse attendue pour M, en regardant l'ensemble A.
  - Si on constate que $M \in A$, on peut à la place montrer que M est le maximum de A, ce qui est plus simple.
  - Sinon, on utilise la caractérisation de la borne supérieure ou la caractérisation en termes de suites.
- Si A est de la forme $\{f(x) \mid x \in D\}$ avec $f : D \to \mathbb{R}$, on peut étudier la fonction f.